

BDA015 Stavební mechanika 1

11. přednáška

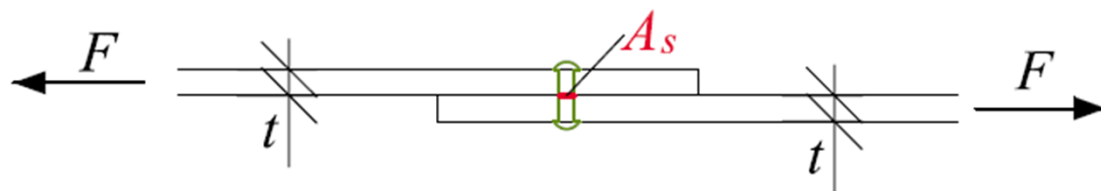
- Prostý smyk, prostý ohyb
- Smyk za ohybu
- Smyk v tenkostěnných nosnících, střed smyku

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

T FAST PROSTÝ SMYK

- v průřezu působí pouze posouvající síla
- uvažujeme rovnoměrné rozdělení smykového napětí po ploše vzdorující namáhání smykovou silou
- spoje namáhané tahem (hmoždíkové, hřebíkové, nýťované, šroubované, svařované)
- **SMYKOVÉ NAPĚTÍ**

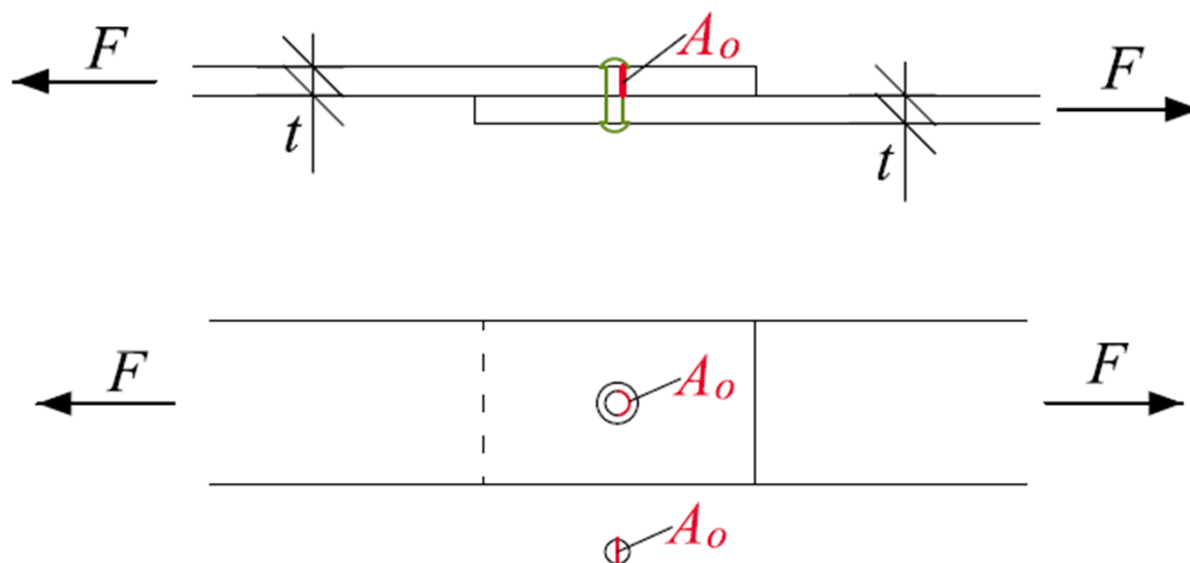
$\tau = \frac{F}{A_s}$; A_s – plocha, ve které by došlo k ustříhnutí



- NAPĚTÍ V OTLAČENÍ**

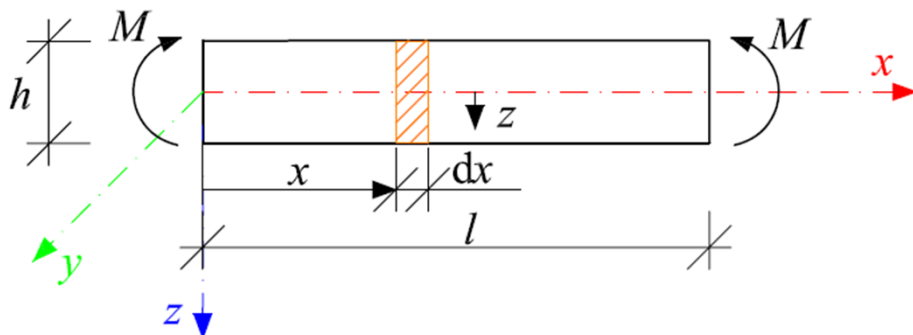
nerovnoměrné namáhání na otláčení se nahradí rovnoměrným normálovým napětím působícím na náhradní ploše

$$\sigma_o = \frac{F}{A_o} = \frac{F}{d \cdot t}; d - \text{průměr spojovacího prvku}$$



ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

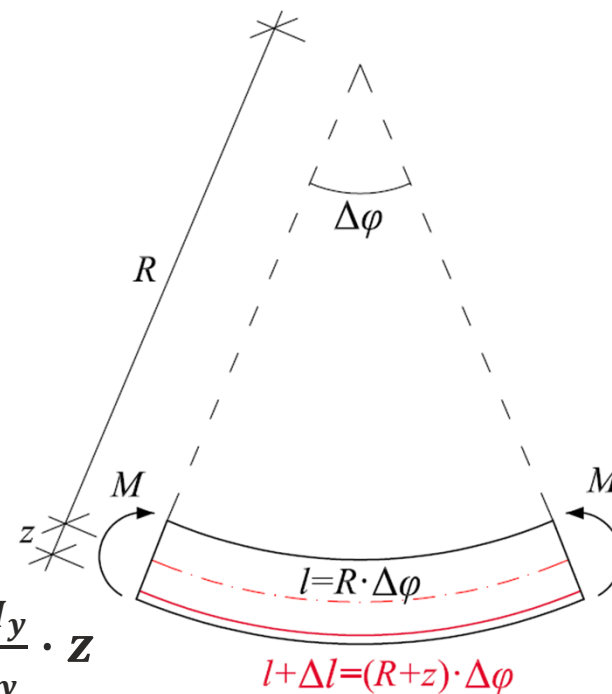
- průřezy zůstávají **rovinnými a kolmými ke střednici** i po deformaci (Bernoulliho hypotéza) – $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$
- průřezy se po deformaci protnou v jednom bodě – **střed křivosti**



$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x; \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{z \cdot \Delta \varphi}{R \cdot \Delta \varphi} = \frac{z}{R} \rightarrow \sigma_x = E \frac{z}{R}$$

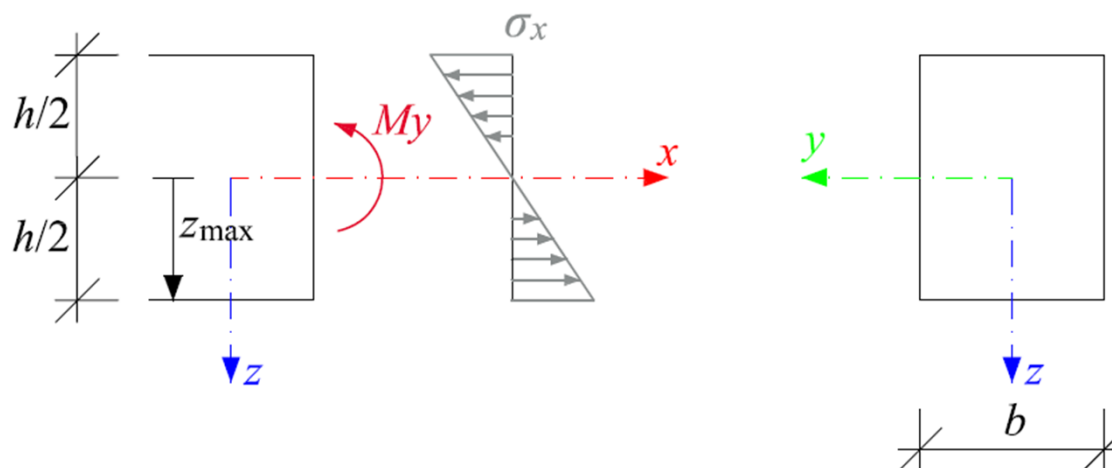
$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, dA = \int_A E \frac{z}{R} \cdot z \, dA = \frac{E}{R} \int_A z^2 \, dA \rightarrow$$

$$M_y = \frac{EI_y}{R} \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_y}{EI_y} \rightarrow \sigma_x = E \frac{z}{R} = E \frac{z \cdot M_y}{EI_y} \rightarrow \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$



PRŮBĚH NAPĚTÍ PO VÝŠCE PRŮŘEZU

- lineární průběh po výšce průřezu, extrémní hodnoty vznikají v krajních bodech



$$\sigma_{x, \max} = - \sigma_{x, \min}$$

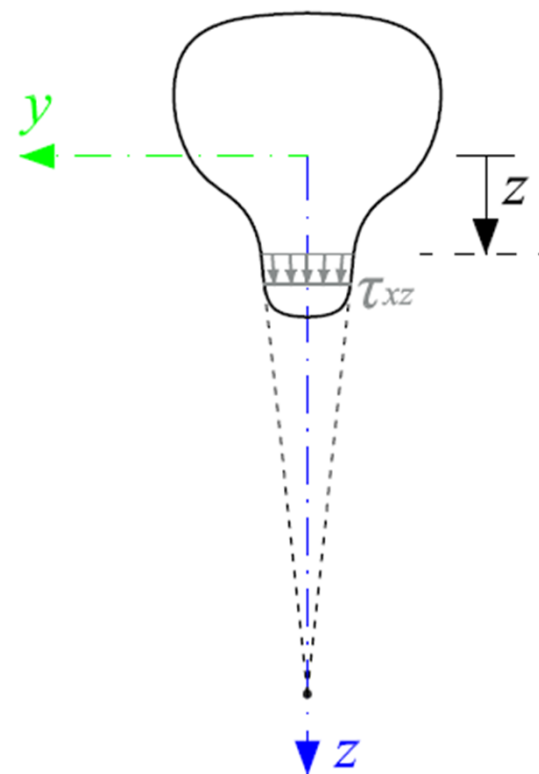
$$\sigma_{x, \max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\max} = \frac{M_y}{W_y}; f_d \geq \sigma_{x, \max} - \text{posudek}$$

Průřezový modul W

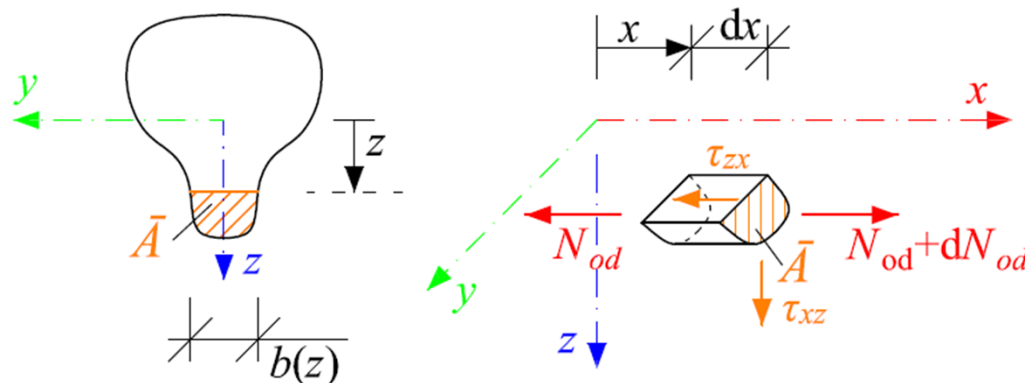
$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} [\text{m}^3]; W_y = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2 \dots \text{obdélníkový průřez}$$

ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY (Grashof)

- podél rovnoběžky s neutrální osou je svislá složka smykového napětí konstantní – $\tau_{xz} = \text{konst}$
- vektory výsledných smykových napětí podél této osy vždy směřují do společného bodu – průsečíku tečen k obrysu průřezu



PODMÍNKY ROVNOVÁHY



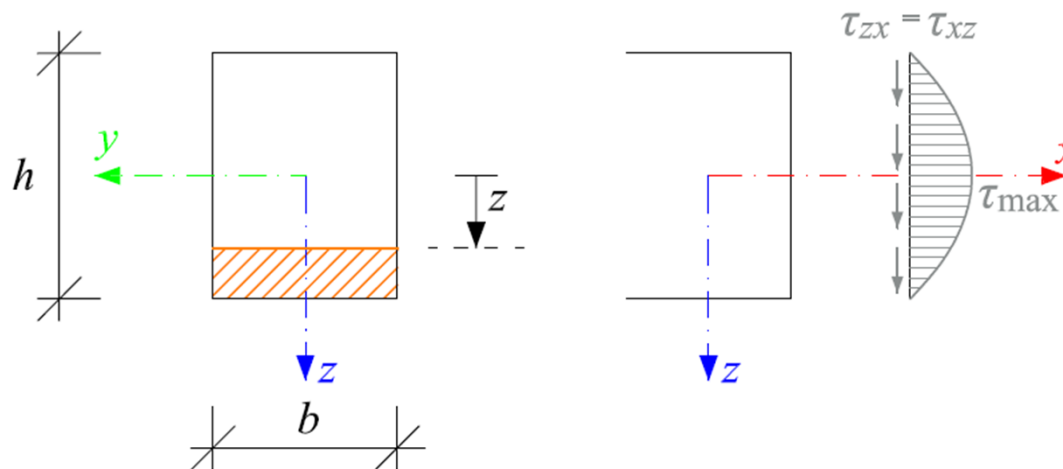
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$N_{od} = \int_A \sigma_x dA = \int_A \frac{M_y}{I_y} \cdot z dA = \frac{M_y}{I_y} \int_A z dA = \frac{M_y}{I_y} \bar{S}_y(z)$$

$$\sum F_{i,x} = 0: N_{od} - (N_{od} + dN_{od}) + \tau_{zx} \cdot dx \cdot b(z) = 0$$

$$\tau_{zx} = \frac{dN_{od}}{dx} \cdot \frac{1}{b(z)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y}{I_y} \bar{S}_y(z) \right) \cdot \frac{1}{b(z)} = \frac{\bar{S}_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \cdot \frac{dM_y}{dx}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{V_z \cdot \bar{S}_y(z)}{I_y \cdot b(z)}; f_d \geq \sigma_{x, \max}; f_{vd} = \frac{f_d}{\sqrt{3}} \geq \tau_{x, \max} - \text{posudek}$$



$$\overline{S}_y(z) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) \cdot \left(\frac{h}{2} + z \right) \frac{1}{2} = \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2)$$

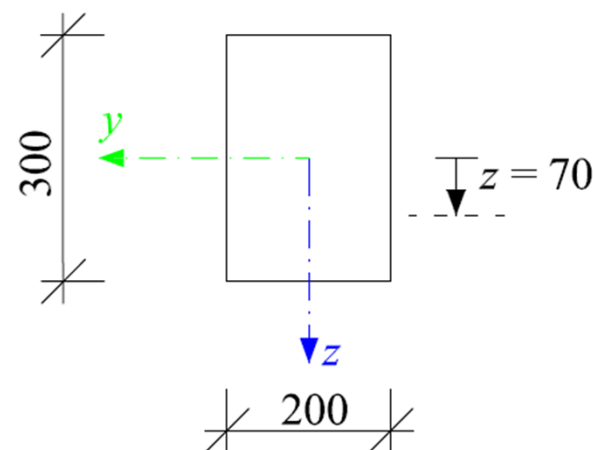
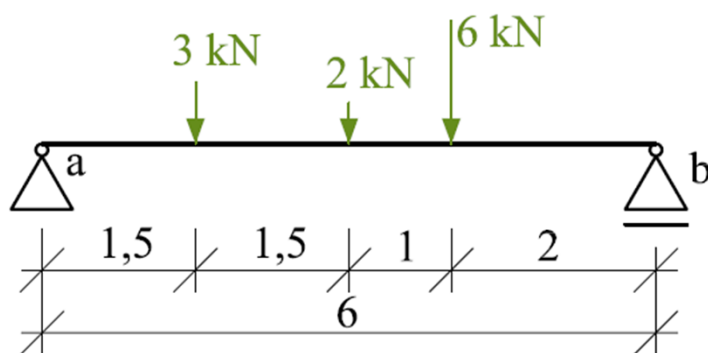
$$\tau_{zx} = \frac{V \cdot \overline{S}_y(z)}{I_y \cdot b(z)} = \frac{V}{I_y} \frac{1}{8} (h^2 - 4z^2) = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) - \text{kvadratická parabola}$$

T FAST PRVKY NAMÁHANÉ OHYBEM

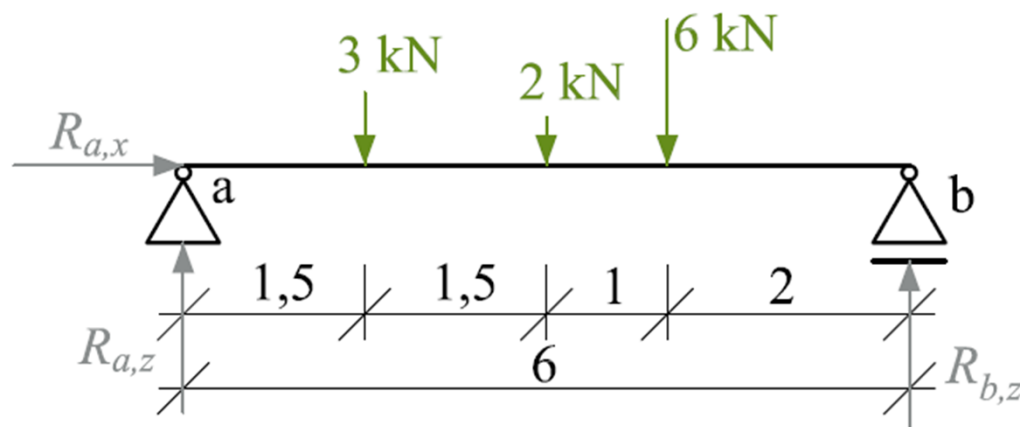
Určete maximální normálové napětí:

- v přechodovém průřezu
- pod silou 2 kN – maximální a ve vzdálenosti $z = 70$ mm

Určete extrém smykového napětí

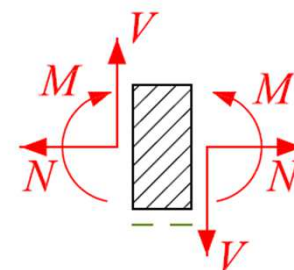
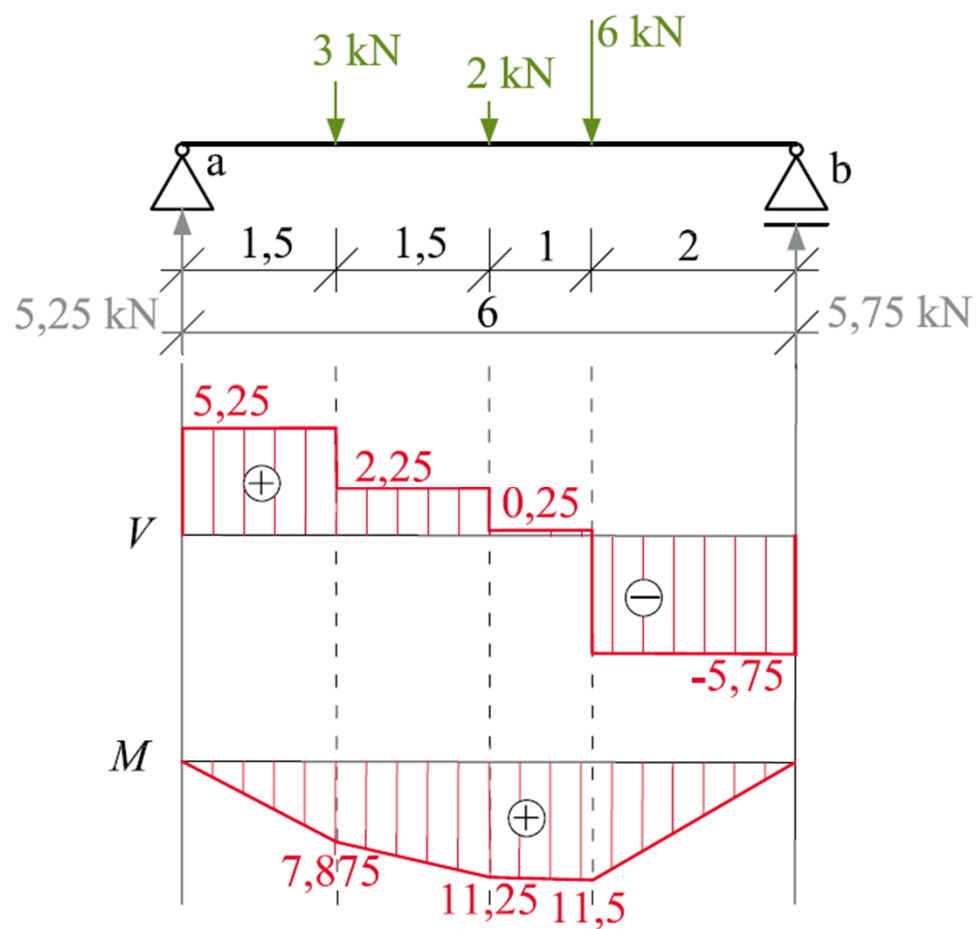


1) Výpočet reakcí



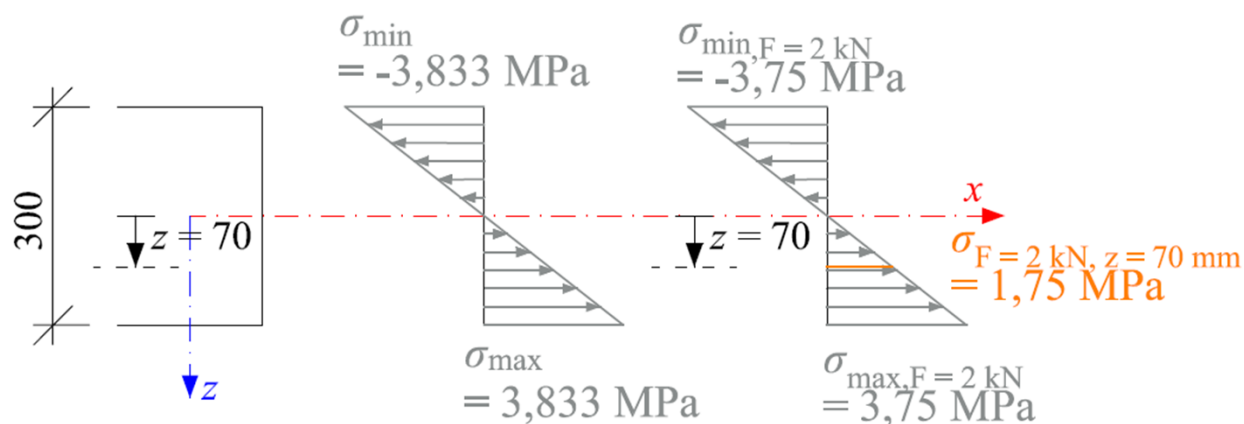
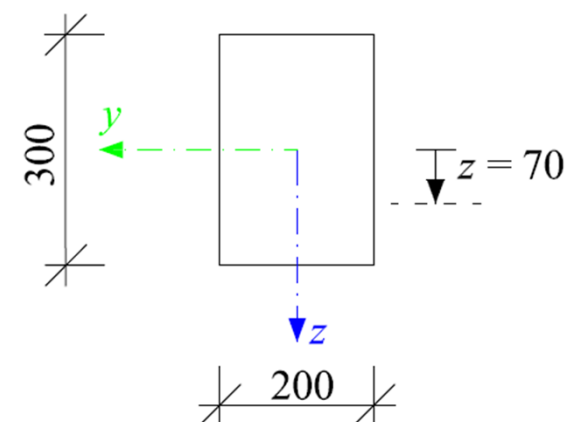
- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x} = 0 \quad \xrightarrow{\oplus}$
- $\sum M_{i,a} = 0; R_{b,z} \cdot 6 - 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = 0 \rightarrow R_{b,z} = 5,75 \text{ kN} \quad \curvearrowright \oplus$
- $\sum M_{i,b} = 0; -R_{a,z} \cdot 6 + 3 \cdot 4,5 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{a,z} = 5,25 \text{ kN}$
- $\sum F_{i,z} = 0; 3 + 2 + 6 - R_{a,z} - R_{b,z} = 0; 0 = 0 \rightarrow \text{VYHOVÍ} \quad \downarrow \oplus$

2) Průběhy vnitřních sil



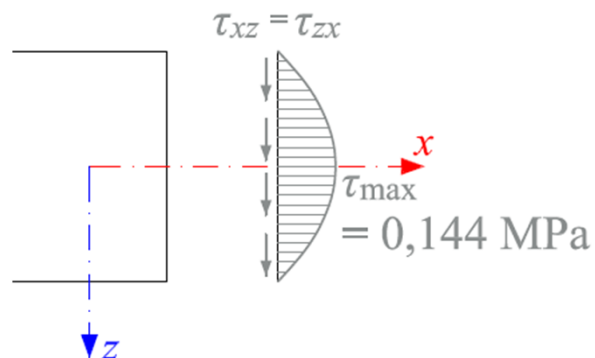
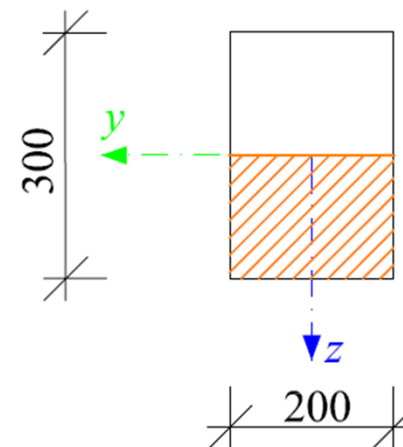
3) Průběh normálového napětí

- $I_y = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}0,2 \cdot 0,3^3 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
- $\sigma_{\max} = \frac{M_{y, \max}}{I_y} \cdot Z_{\max} = \frac{11,5 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,15 = 3,833 \text{ MPa}$
- $\sigma_{F=2 \text{ kN}} = \frac{M_{y, F=2 \text{ kN}}}{I_y} \cdot Z_{\max} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,15 = 3,75 \text{ MPa}$
- $\sigma_{F=2 \text{ kN}; z=70 \text{ mm}} = \frac{M_{y, F=2 \text{ kN}}}{I_y} \cdot Z_{70 \text{ mm}} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,07 = 1,75 \text{ MPa}$
- $\frac{0,15}{3,75} = \frac{0,07}{\sigma_{F=2 \text{ kN}; z=70 \text{ mm}}}$



4) Průběh smykového napětí

- $\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot \overline{S_{y,max}}}{I_y \cdot b}$
- $\overline{S_{y,max}} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 0,2 \cdot 0,15 \cdot 0,075 = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
- $\tau_{max} = \frac{5,75 \cdot 10^3 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3}}{4,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2} = 0,14375 \text{ MPa}$



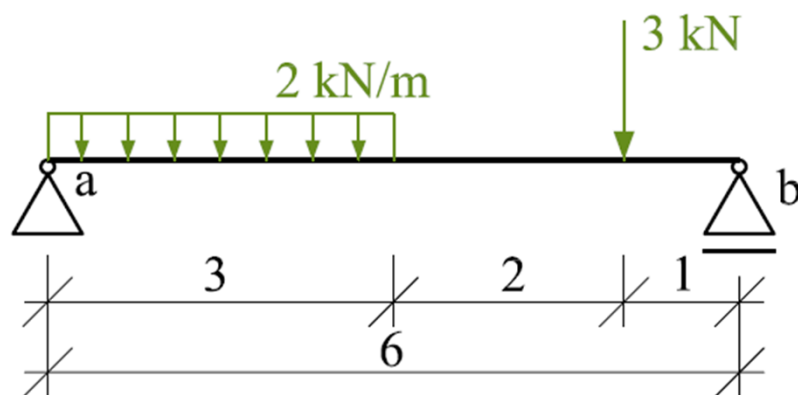
T FAST PRVKY NAMÁHANÉ OHYBEM

Navrhnete průřez nosníku jako obdélník s poměrem stran:

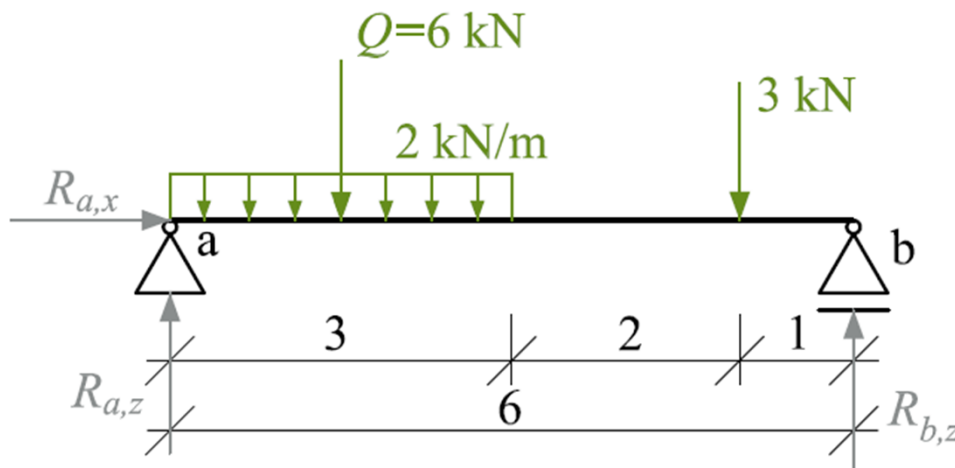
- $b : h = 2 : 3$

Určete extrémy normálového a smykového napětí a proveďte posudek

- $f_d = 60 \text{ MPa}$, $f_{vd} = 8 \text{ MPa}$

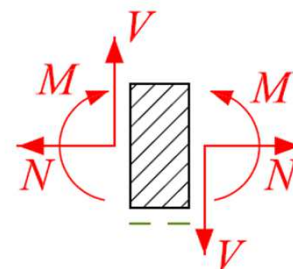
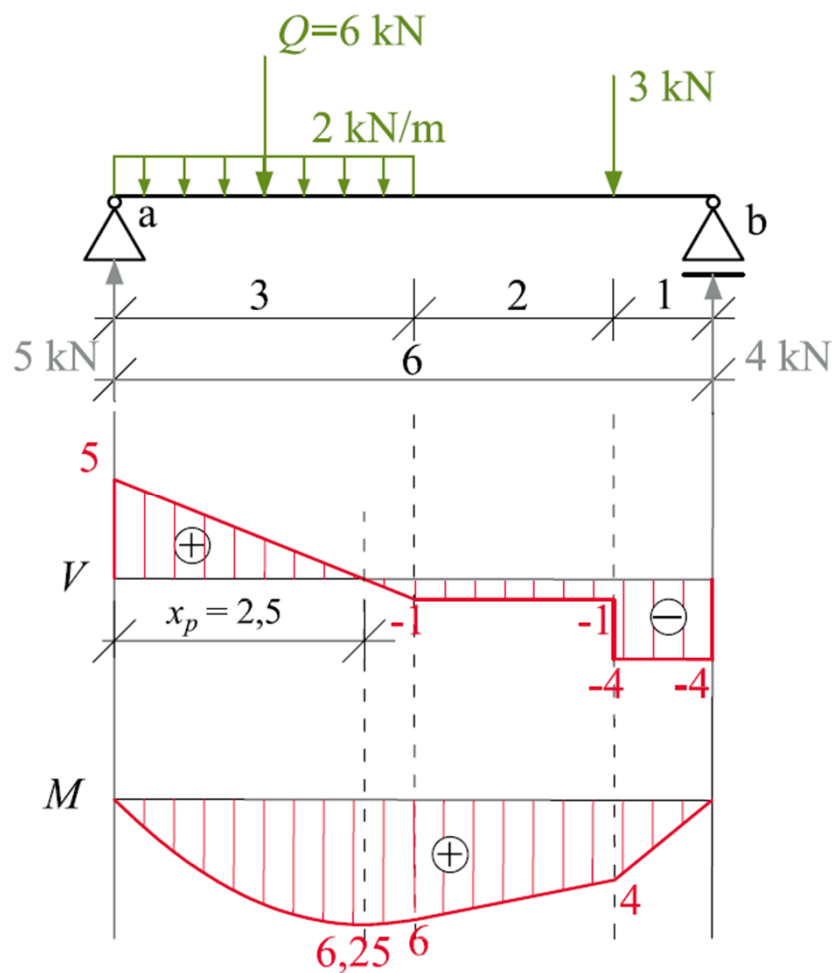


1) Výpočet reakcí



- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x} = 0$ $\xrightarrow{\oplus}$
- $\sum M_{i,a} = 0; R_{b,z} \cdot 6 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow R_{b,z} = 4 \text{ kN}$ $\curvearrowright \oplus$
- $\sum M_{i,b} = 0; -R_{a,z} \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4,5 + 3 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_{a,z} = 5 \text{ kN}$
- $\sum F_{i,z} = 0; 6 + 3 - R_{a,z} - R_{b,z} = 0; 0 = 0 \rightarrow \text{VYHOVÍ}$ $\downarrow \oplus$

2) Průběhy vnitřních sil



3) Návrh a posudek průřezu na ohyb

- $f_d \geq \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{M_{y, \max}}{\frac{1}{12}bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{y, \max}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}h \cdot h^2} = \frac{M_{y, \max}}{\frac{1}{9}h^3}$
- $\rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot M_{y, \max}}{f_d}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 6,25 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6}} \rightarrow h_{\min} = 0,098 \text{ m}$

Návrh průřezu (nejbližší vyšší hodnota)

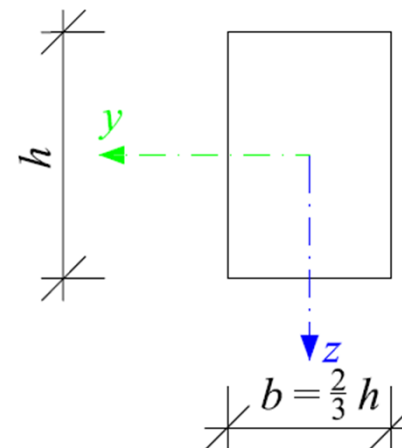
- zvoleno $h = 105 \text{ mm}$; $b = 70 \text{ mm}$; $I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,07 \cdot 0,105^3 = 6,753 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$

Posudek

- $\sigma_{\max} = \frac{M_{y, \max}}{I_y} \cdot z_{\max} = \frac{6,25 \cdot 10^3}{6,753 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,0525 = 48,59 \text{ MPa}$
- $f_d \geq \sigma_{x, \max}$; $60 \geq 48,59 \rightarrow \text{VYHOVÍ}$

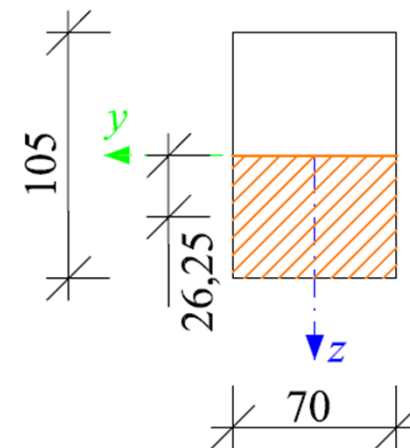
Maximální moment

- $M_{Rd} = \frac{f_d \cdot I_y}{z_{\max}} = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 6,753 \cdot 10^{-6}}{0,0525} = 7,717 \text{ kN} > M_{y, \max}$

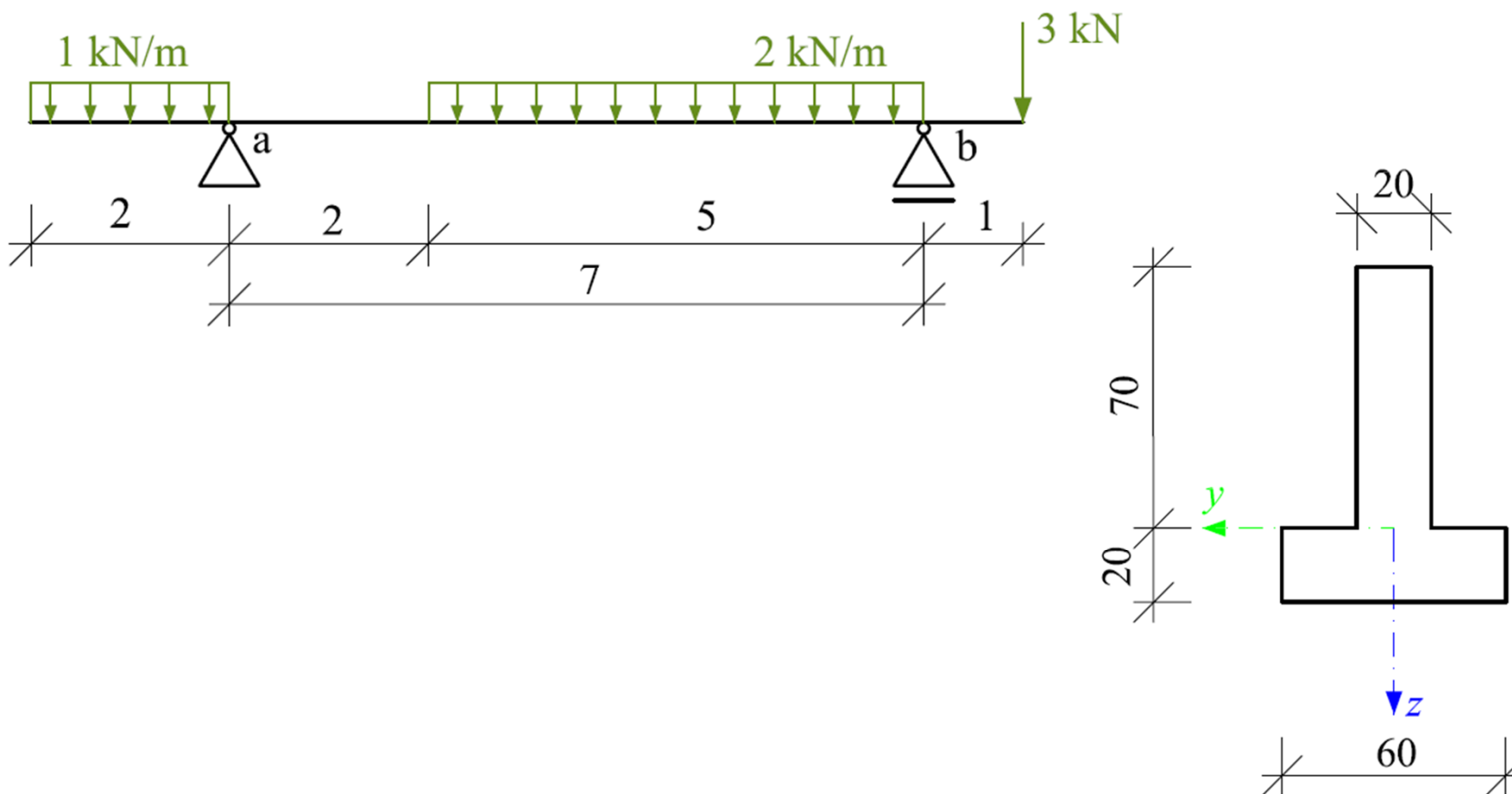


4) Posudek na smyk

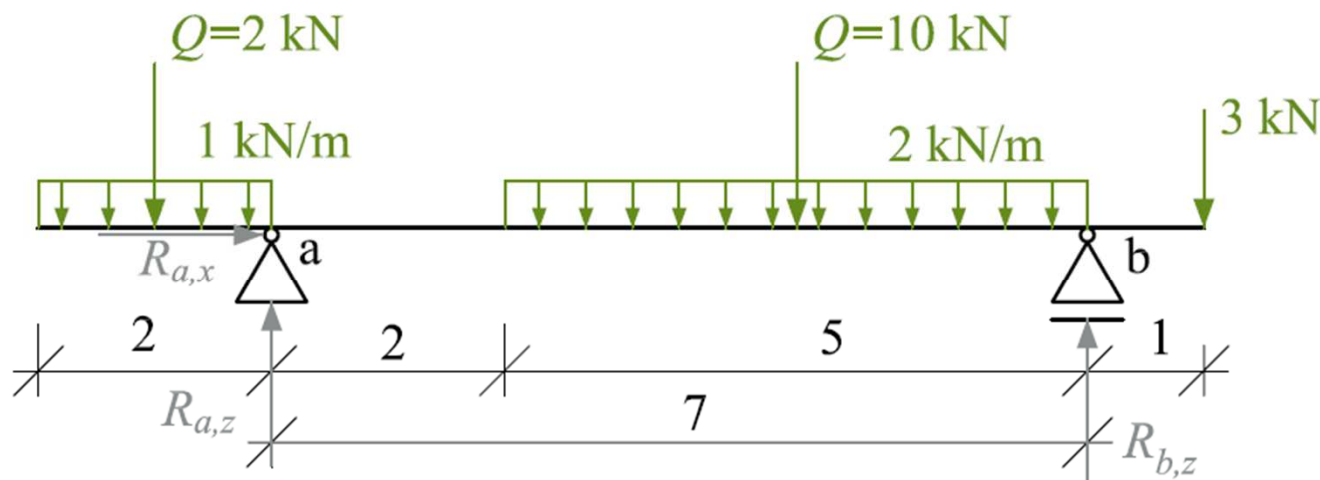
- $\tau_{\max} = \frac{V_{\max} \cdot \overline{S_{y,\max}}}{I_y \cdot b} \leq f_{vd}$
- $\overline{S_{y,\max}} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 0,07 \cdot 0,0525 \cdot 0,02625 \rightarrow$
 $\overline{S_{y,\max}} = 9,647 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$
- $\tau_{\max} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 9,647 \cdot 10^{-5}}{6,753 \cdot 10^{-6} \cdot 0,07} = 1,02 \text{ MPa} \leq 8 \text{ MPa} \rightarrow \text{VYHOVÍ}$



Určete extrémy normálového a smykové napětí

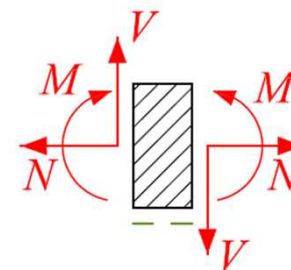
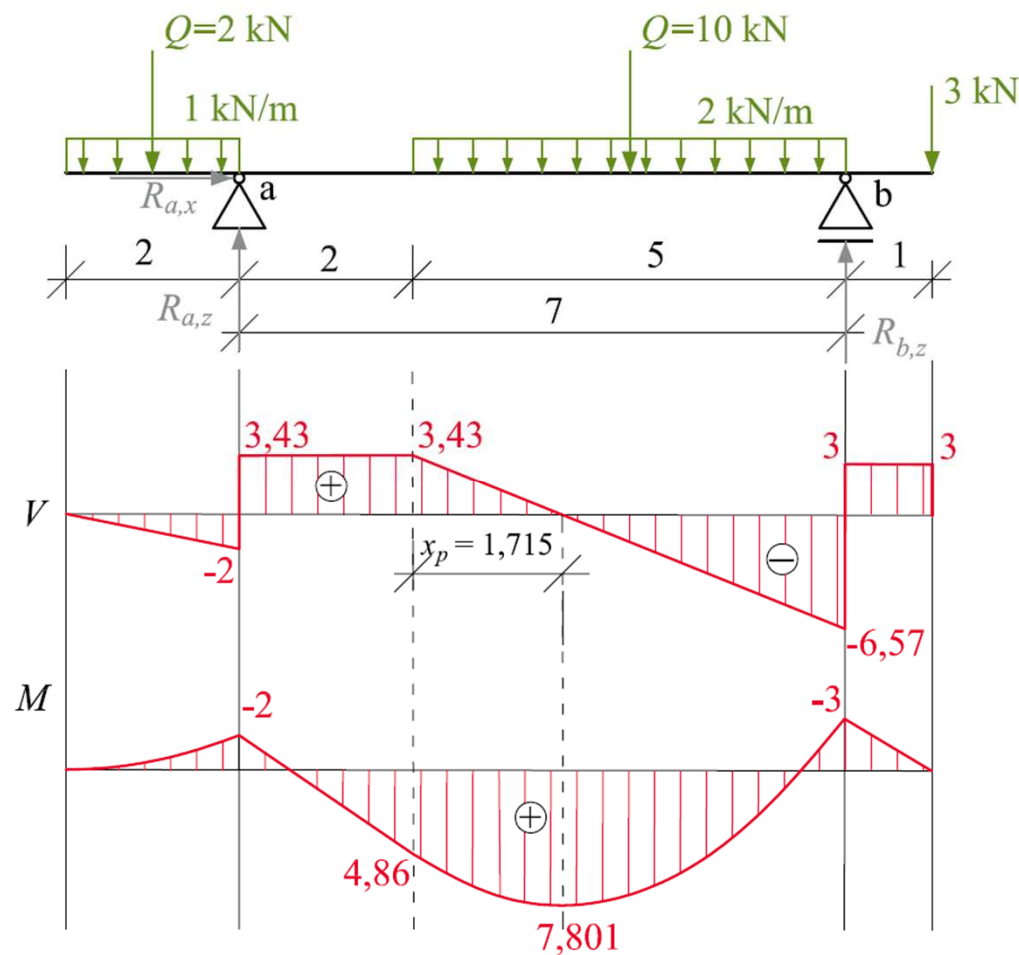


1) Výpočet reakcí



- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x} = 0$ $\xrightarrow{\oplus}$
- $\sum M_{i,a} = 0; 2 \cdot 1 - 10 \cdot 4,5 + R_{b,z} \cdot 7 - 3 \cdot 8 = 0 \rightarrow R_{b,z} = 9,57$ kN
- $\sum M_{i,b} = 0; 2 \cdot 8 - R_{a,z} \cdot 7 + 10 \cdot 2,5 - 3 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_{a,z} = 5,43$ kN
- $\sum F_{i,z} = 0; 2 + 10 + 3 - R_{a,z} - R_{b,z} = 0; 0 = 0 \rightarrow$ VYHOVÍ $\downarrow \oplus$

2) Průběhy vnitřních sil

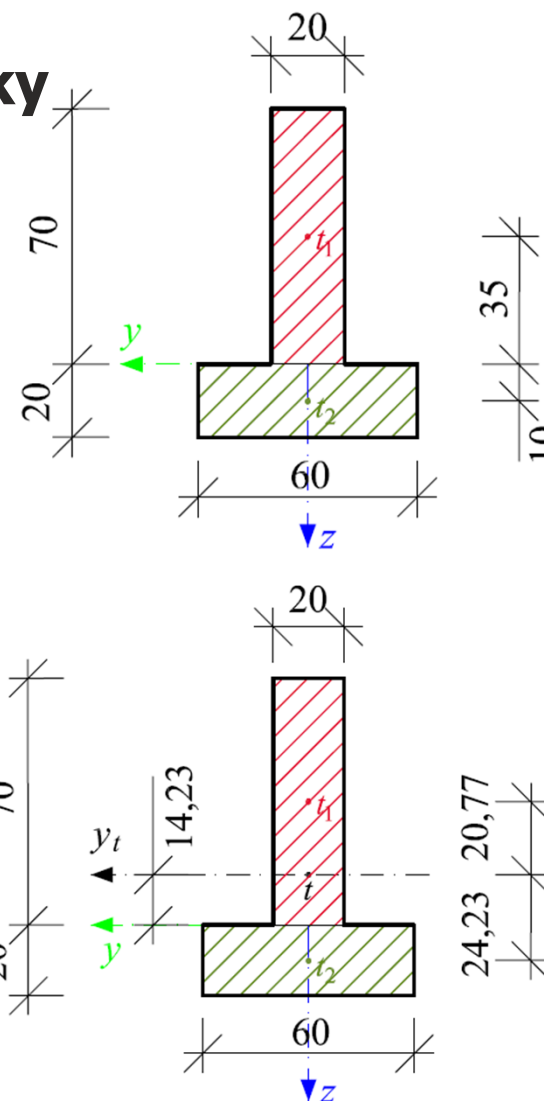


3) Poloha těžiště, průřezové charakteristiky

- $A = 20 \cdot 70 + 60 \cdot 20 = 2\,600 \text{ mm}^2$
- $S_y = \sum_{i=1}^n S_{y_i} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot z_i$
 $= 20 \cdot 70 \cdot (-35) + 60 \cdot 20 \cdot 10 = -37\,000 \text{ mm}^3$
- $z_t = \frac{S_y}{A} = \frac{-37\,000}{2\,600} = -14,23 \text{ mm}$

Moment setrvačnosti

- $I_{y_t} = \sum_{i=1}^n (I_{y_{t,i}} + A_i \cdot (z_i - z_t)^2)$
 $= \frac{1}{12} 20 \cdot 70^3 + 20 \cdot 70 \cdot (-20,77)^2 + \frac{1}{12} 60 \cdot 20^3$
 $+ 60 \cdot 20 \cdot 24,23^2 = 1,92 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_{y_t} = 1,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$



4) Extrémy normálového napětí

- $\sigma_{\max}^d = \frac{M_{y, \max}}{I_{yt}} \cdot z^d = \frac{7,801 \cdot 10^3}{1,92 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,03423 \rightarrow$

$\sigma_{\max}^d = 139,077 \text{ MPa}$ – TAH v dolních vláknech

- $\sigma_{\min}^h = \frac{M_{y, \max}}{I_{yt}} \cdot z^h = \frac{7,801 \cdot 10^3}{1,92 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,05577) \rightarrow$

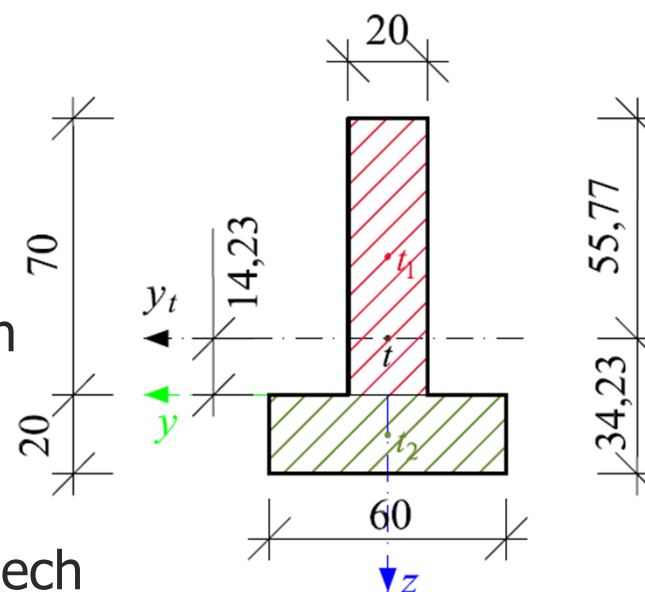
$\sigma_{\min}^h = -226,595 \text{ MPa}$ – TLAK v horních vláknech

- $\sigma_{\max}^h = \frac{M_{y, \min}}{I_{yt}} \cdot z^h = \frac{-3 \cdot 10^3}{1,92 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,05577) \rightarrow$

$\sigma_{\max}^h = 87,141 \text{ MPa}$ – TAH v horních vláknech

- $\sigma_{\min}^d = \frac{M_{y, \min}}{I_{yt}} \cdot z^d = \frac{-3 \cdot 10^3}{1,92 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,03423 \rightarrow$

$\sigma_{\min}^d = -53,484 \text{ MPa}$ – TLAK v dolních vláknech



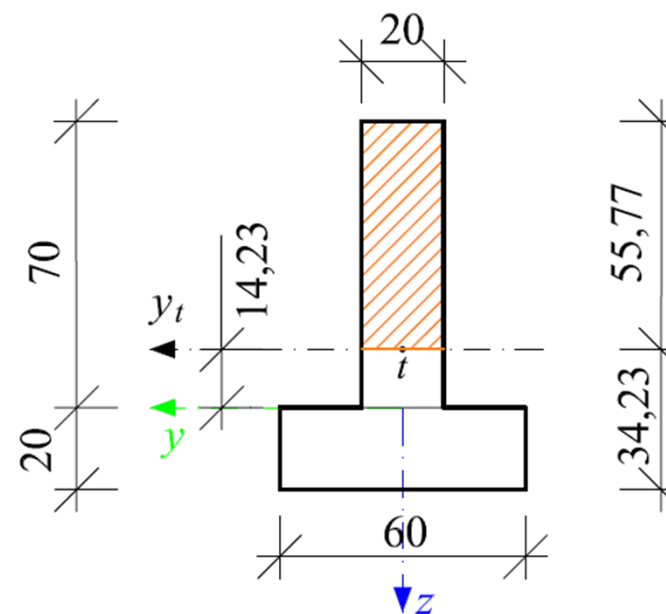
4) Extrém smykového napětí

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} \cdot \overline{S_{y,\max}}}{I_y \cdot b}$$

$$\overline{S_{y,\max}} = 20 \cdot 55,77 \cdot \left(-\frac{55,77}{2}\right) \rightarrow$$

$$\overline{S_{y,\max}} = -31,1 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = -31,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{-6,57 \cdot 10^3 \cdot (-31,1 \cdot 10^{-6})}{1,92 \cdot 10^{-6} \cdot 0,02} = 5,32 \text{ MPa}$$



TENKOSTĚNNÉ NOSNÍKY $t \ll h$ (1:10)

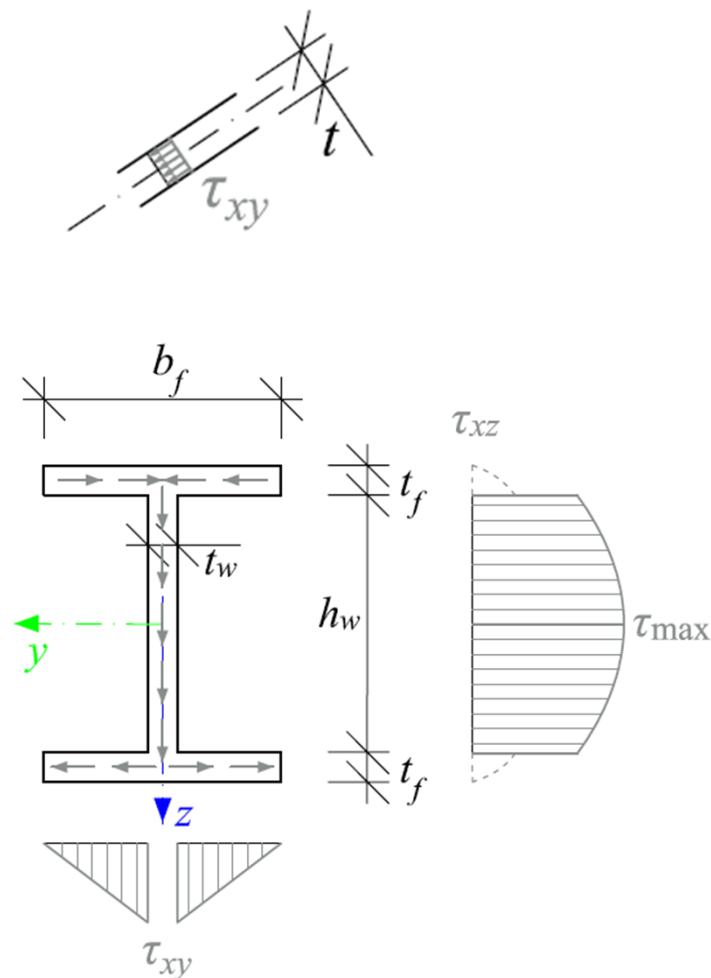
- otevřené průřezy – I, U, L, T, ...
- uzavřené průřezy – $\square$ $\bigcirc$

ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

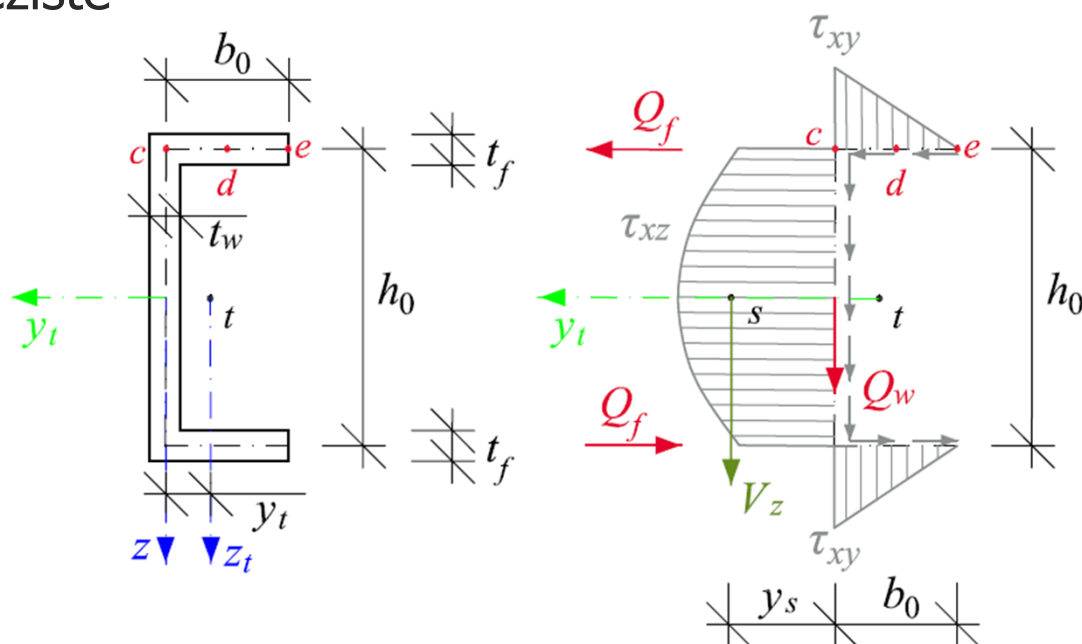
- smykové napětí je konstantní po tloušťce stěn (v řezu kolmém ke stěně)
- smyková napětí jsou rovnoběžná s obrysem průřezu

SMYKOVÉ NAPĚTÍ

$$\tau_x = \frac{V_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot t}; t \text{ – tloušťka stěny v místě řezu}$$

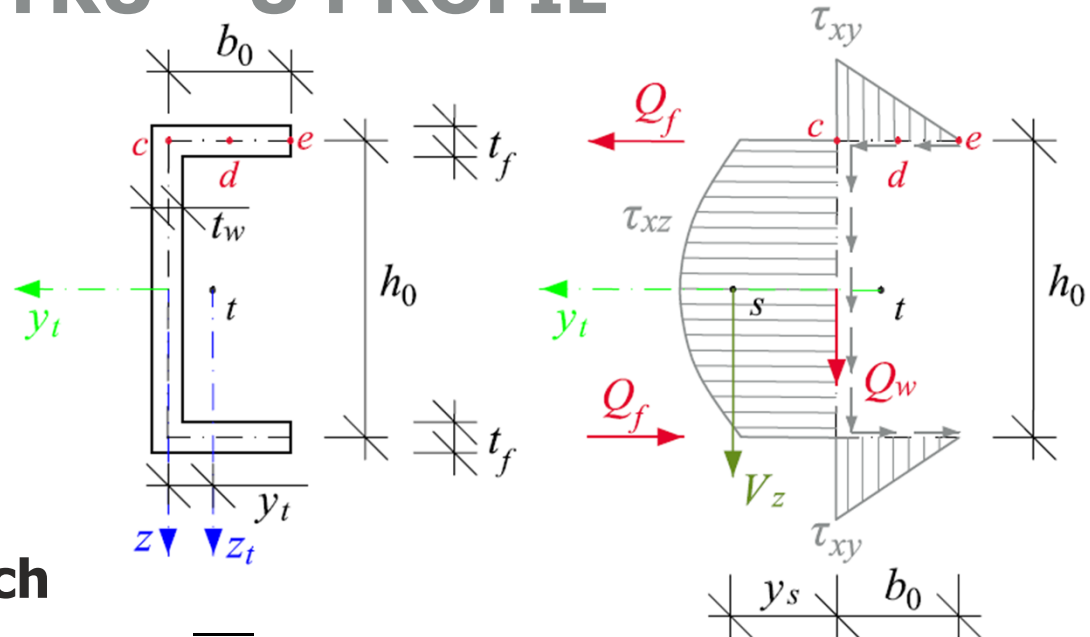


- bod na průřezu kam musí působit výslednice zatížení, aby nebyl prut kroucen – statický střed výslednic smykových napětí
- výsledné smykové síly Q lze odvodit integrací smykových napětí podél stěn otevřeného profilu
- u tenkostěnných nesymetrických průřezů je poloha středu smyku odlišná od polohy těžiště



Poloha těžiště

- $A = 2 \cdot t_f \cdot b_0 + t_w \cdot h_0$
- $S_z = 2 \cdot t_f \cdot b_0 \cdot \frac{b_0}{2} = t_f \cdot b_0^2$
- $y_t = \frac{S_z}{A} = \frac{t_f \cdot b_0^2}{2 \cdot t_f \cdot b_0 + t_w \cdot h_0}$



Smykové napětí na pásnicích

- $\tau_{xy}^c = \frac{V_z \cdot \overline{S_{yt}^c}}{I_y \cdot t_f}$; $\overline{S_{yt}^c} = t_f \cdot b_0 \cdot \frac{h_0}{2}$; $\tau_{xy}^d = \frac{V_z \cdot \overline{S_{yt}^d}}{I_y \cdot t_f}$; $\overline{S_{yt}^d} = t_f \cdot \frac{b_0}{2} \cdot \frac{h_0}{2} \rightarrow \tau_{xy}^d = \frac{1}{2} \tau_{xy}^c$

Výslednice smykových sil na pásnicích

- $Q_f = \int_{A_f} \tau_{xy} dA = \int_c^e \tau_{xy} \cdot t_f \cdot dy = t_f \cdot \frac{1}{2} \tau_{xy}^c \cdot b_0 = t_f \cdot b_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{V_z \cdot t_f \cdot b_0 \cdot \frac{h_0}{2}}{I_y \cdot t_f} \rightarrow$
 $Q_f = \frac{V_z \cdot b_0^2 \cdot h_0 \cdot t_f}{4I_y}$

Smykové napětí na stojině

- $$\tau_{xz} = \frac{V_z}{8 \cdot I_y \cdot t_w} [4t_f \cdot b_0 \cdot h_0^2 + t_w \cdot (h_0 - 4z^2)]$$

Výslednice smykových sil na stojině

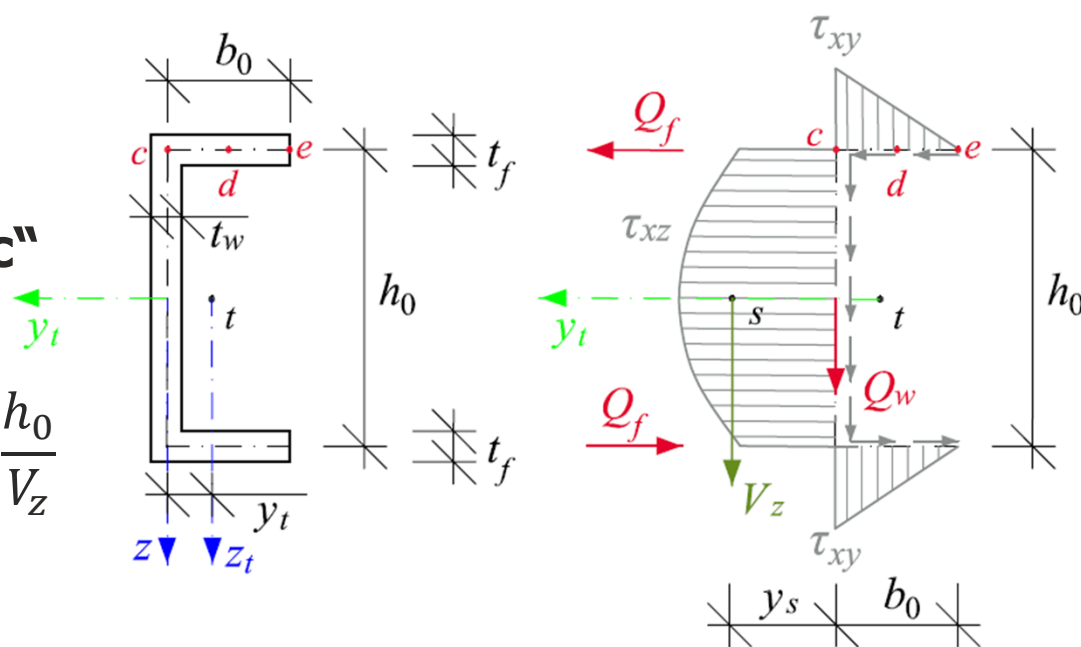
- $$Q_w = V_z$$

Statické momenty k bodu „c“

- $$V_z \cdot y_s = Q_f \cdot h_0 \rightarrow$$

$$y_s = \frac{Q_f \cdot h_0}{V_z} = \frac{V_z \cdot b_0^2 \cdot h_0 \cdot t_f}{4I_y} \cdot \frac{h_0}{V_z}$$

$$y_s = \frac{b_0^2 \cdot h_0^2 \cdot t_f}{4I_y}$$



- určení smykových napětí – staticky neurčitá úloha
- nutná definice deformačních podmínek
- symetrický jednokomorový uzavřený průřez, zatížený v rovině symetrie
 - smyková napětí jsou v rovině symetrie nulová
 - průběh napětí po výšce stejný jako u otevřeného průřezu, který vznikl rozdělením uzavřeného průřezu podle osy symetrie

